Zur experimentellen Nachprüfung dieser Theorie sind besonders die Dickenformeln (4.4), (6.10) und (6.11) geeignet. Den Einfluß der stark temperaturabhängigen mittleren Diffusionslängen λ und λ^* kann man durch genau festgelegte und variierte Temperatur des bedampften Einkristalles erfassen. Eine Erhöhung der Konzentration an Verunreinigungen muß zu Einschnürungen des Querschnittes führen. Auch die Formeln über das Whisker-Profil von Abschnitt 3 (bzw. 6) können durch geeignete elektronenmikroskopische Verfahren nachgeprüft werden [13]. Besondere Schwierigkeiten sind allerdings mit dem definierten Aufdampfen der äußerst geringen Konzentrationen von Verunreinigungen zu erwarten. Wie früher beschrieben [2], muß die Temperatur ausreichend hoch sein, damit alle Teilchen auf der Oberfläche beweglich bleiben und der Blockierungsmechanismus möglich ist. Ist sie zu niedrig, so werden die Verunreinigungen umwachsen, und es ergeben sich völlig andere Verhältnisse [14].

Herrn Prof. Dr. N. Riehl danke ich sehr für die stete Förderung dieser Arbeit, Herrn Dr. H. Eicher für klärende Diskussionen.

[13] Siehe beispielsweise die von Bethge [5] benutzte Methode zur Bestimmung von Abdampfspiralen.

[14] Siehe hierzu die Theorie von P. B. Price, D. A. Vermilyea u. M. B. Webb, Acta Met. **6**, 524 [1958].

Anwendung der Betz-Petersohn-Methode auf ein Oberflächen-Diffusionsproblem

Wolf-Udo Wagner

Physik-Department der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. **20 a**, 712—718 [1965]; eingegangen am 24. Dezember 1964)

Considered are particles which are condensed homogeneously on a plane surface from the vapour phase. They are removed in circular or straight sinks. The edges of the sinks are partially masked by an array of small obstacles. The problem of surface diffusion is solved by a method of conformal mapping following Betz and Petersohn [1]. The obstacles cause an increase of particle density in a step-like fashion. The amplitude of the step depends on the degree of masking. As long as the sinks are not completely masked the density step is comparatively small and superimposed on the density function of unmasked sinks. The particle flux remains unchanged up to complete masking of the sinks.

Das in der vorstehenden Arbeit [2] aufgeworfene Diffusionsproblem läßt sich folgendermaßen allgemein formulieren. Auf einer ebenen Oberfläche sind in regelmäßiger Anordnung kreisförmige Senken vom Radius r_0 angeordnet [3]. Auf die Oberfläche werden mit konstanter Geschwindigkeit v Teilchen pro Flächen- und Zeiteinheit aufgedampft. Sobald ein Teilchen, das mit der Diffusionskonstanten D auf der Oberfläche beweglich ist, die Senke erreicht, verschwindet es. Der stationäre Zustand der Teilchendichte n und des Teilchenstromes $j = -D(\mathrm{d}n/\mathrm{d}r)$ ist für völlig offene Senken durch die Gl. (1.5) von I beschrieben. Gesucht sind nun Teilchendichte und -strom für den Fall, daß die Senken von einer regelmäßigen Anordnung von linearen undurchdringlichen Hindernissen der Länge L umschlossen sind (Abb. 1). Pro cm Senkenumfang seien T derartige Barrieren angebracht.

Diese Aufgabe wird für den praktisch wichtigen Fall gelöst, daß die Hindernisse klein gegenüber der Senke sind $(L \ll r_0)$. Die zwischen den Barrieren freibleibenden Öffnungen sollen wiederum klein gegenüber diesen Barrieren sein $(L\,T > 0{,}8)$, denn nur dann wird sich der stationäre Zustand wesentlich von dem offener Senken unterscheiden. Die Einschränkung regelmäßiger Anordnung wird sich später als unwesentlich erweisen; die Länge L kann dann als mittlere Länge von verschieden großen Hindernissen aufgefaßt werden, T als mittlere Belegungsdichte.

Die Randbedingung bei der Senke schreibt vor, daß stellenweise die Teilchenzahl verschwindet (Öffnungen mit $n = 0$), stellenweise der radiale Strom Null wird [Hindernisse mit $j_r \equiv -D(\partial n/\partial r) = 0$].

[1] A. Betz u. E. Petersohn, Ing. Arch. **2**, 190 [1931].

[2] W.-U. Wagner, Z. Naturforschg. **20 a**, 705 [1965], künftig mit I bezeichnet.

[3] Siehe Abb. 2 von I. Wegen $\bar{r}$ s. Abschnitt 1 von I.

Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung") beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Es handelt sich demnach um eine sogenannte Randwertaufgabe dritter Art, deren Lösung nur in wenigen Fällen möglich ist. Die vorliegende Aufgabe läßt sich aber mit der von BETZ und PETERSOHN [1] angegebenen Lösung behandeln.

Das Ergebnis enthält gleichzeitig die Lösung für die in Abb. 2 dargestellte Aufgabe, bei der eine Halbebene durch die mit Hindernissen abgeschirmte Senke begrenzt wird. Außer der grundsätzlichen Bedeutung des Problems für die Kinetik der Whisker-Entstehung [2] ist es für alle Fragen der Oberflächendiffusion von Interesse, bei denen (zumindest in einer Dimension) makroskopische Senken von kleinen Hindernissen, wie z. B. Verunreinigungen,

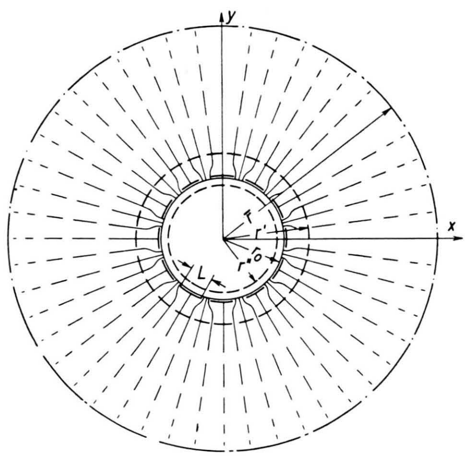

Abb. 1. Stromlinien bei kreisförmiger Senke, der $2\pi r_0 \cdot T$ Hindernisse der Länge L vorgelagert sind. z-Ebene.

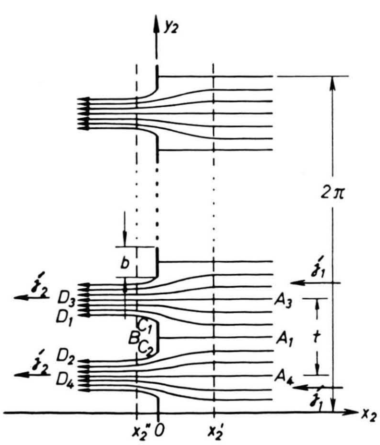

Abb. 2. z_2-Ebene. $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ sind die Stromdichten weit vor und weit hinter den Durchlässen.

[4] Siehe I. Gl. (1.2) hätte dort auch zur Herleitung der Formeln des 1. Abschnittes herangezogen werden können.

teilweise blockiert sind. Nichtkreisförmige Senken können vielfach durch konforme Abbildung auf einen Kreis transformiert werden. Schließlich können die Teilchen auch in anderer Weise als durch Aufdampfen auf die Oberfläche gelangen.

1. Ansatz

Während bei offenen Senken n und j nur von der Radialkoordinate r abhängig sind, werden nun in der Nähe des Randes r_0 Teilchenzahl und -strom auch vom Winkel φ abhängen: $n(r, \varphi)$ und $\mathfrak{j}(r, \varphi)$. Dies sei für $r_0 \leqq r \leqq r'$ der Fall, für $r > r'$ soll die Winkelabhängigkeit vernachlässigt werden. Falls $r' - r_0 \ll r_0$, kann die im inneren Gebiet aufgedampfte Teilchenzahl $\pi(r'^2 - r_0^2)\,v$ gegenüber der von außen zuströmenden $-j(r') \cdot 2\pi r'$ vernachlässigt werden. Damit lautet das Diffusionsproblem

$$\Delta n = 0 \quad \text{für} \quad r_0 \leqq r \leqq r', \tag{1.1}$$

$$\Delta n = -v/D \quad \text{für} \quad r' < r \leqq \bar{r}. \tag{1.2}$$

Für den inneren Bereich gelten als Randbedingungen $n(r_0) = 0$ und $j(r') = j(r')$ des äußeren Bereiches. Im äußeren Bereich gilt wieder $j(\bar{r}) = 0$ [4].

Im Innengebiet läßt sich das Problem mit konformen Abbildungen lösen [5]. Die Ebene wird mit einem Netz von Linien konstanter Teilchenzahl (Potentiallinien) und Stromlinien überzogen und in bekannter Weise Teilchenzahl n und Stromfunktion J zu einem komplexen Potential zusammengefaßt:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \tag{1.3}$$

$$\Phi(z) = n + iJ, \tag{1.4}$$

$$\mathfrak{j} = -\overline{\Phi'(z)}, \tag{1.5}$$

$$n = \Re(\Phi). \tag{1.6}$$

Zur Vereinfachung wird die Diffusionskonstante $D = 1$ gesetzt.

Mit der Ähnlichkeitstransformation

$$z_1 = (1/r_0)\, z \tag{1.7}$$

und mit

$$z_2 = \ln z = \ln(z/r_0) \tag{1.8}$$

geht die radiale Strömung der z-Ebene in eine horizontale der Breite 2π in der z_2-Ebene über, wobei der Kreis r_0 mit der imaginären Achse zusammenfällt (Abb. 2). $r' = \text{const}$ geht in $x_2' = \text{const}$ über.

[5] Siehe hierzu: A. BETZ, Konforme Abbildung, Verlag Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948.

Die in Abb. 2 dargestellte Strömungsaufgabe wurde schon früher gelöst[1]. Als Randbedingung sind dabei gegeben: für $x_2 > 0$ die Richtung der Strömung an den starren Wänden und auf den Symmetrielinien A_1B parallel zu den Wänden bzw. A_1B; für $x_2 < 0$ wird der Strahl hinter der Verengung als freier Strahl betrachtet, an dessen Rand konstanter Druck herrscht und damit nach der Bernoullischen Gleichung konstante Geschwindigkeit. Wie Versuche zeigten[1], stimmt die errechnete Lösung auch dann sehr gut mit den Experimenten überein, wenn der Flüssigkeitsstrahl kurz nach der Verengung auf eine Endplatte auftrifft. (Dies entspricht den beim Whisker-Wachstum vorliegenden Verhältnissen, bei denen der Teilchenstrom kurz nach der Verengung an der Wachstumsfront der untersten Spiralwindung angelagert wird[2].) Während Betz und Petersohn im wesentlichen Stromverlauf und Strahlgrenzen berechnen, muß für unsere Fragestellung $n = \Re\mathfrak{e}(\Phi)$ gewonnen werden.

Mit obigen Randbedingungen ist vom Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{j}(z_2) = |\mathfrak{j}|\, e^{i\psi}$ längs des Stromrandes für $x_2 < 0$ der Betrag $|\mathfrak{j}| = j_2 = \text{const}$ gegeben, für $x_2 > 0$ die Richtung ψ. Nun ist nach Gleichung (1.5) $-\bar{\mathfrak{j}} = \Phi'(z_2)$ eine analytische Funktion von z_2. Bei dem angegebenen Lösungsverfahren wird die z_2-Ebene auf eine z_3-Ebene abgebildet, deren Koordinaten die negativ konjugiert komplexen Werte der Geschwindigkeiten in dem zugeordneten Punkt z_2 darstellen. $\Phi(z_3)$ läßt sich ermitteln. Es gilt danach

$$z_3 = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}z_2\,, \tag{1.9}$$

$$z_2 = \int \frac{1}{z_3}\,\mathrm{d}\Phi = \int \frac{1}{z_3}\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z_3}\,\mathrm{d}z_3\,. \tag{1.10}$$

Die Umzeichnung der Strömung von der z_2-Ebene in die z_3-Ebene ergibt[1] Abb. 3. Gleiche Buchstaben bezeichnen entsprechende Punkte, wobei Punkte, die in der z_3-Ebene zusammenfallen, in der z_2-Ebene durch Indizes unterschieden sind. Alle Stromlinien in der z_3-Ebene verlaufen innerhalb des gezeichneten Halbkreises. Dabei muß von der Strömung in der z_2-Ebene nur ein Streifen der Breite t berücksichtigt werden, wobei

$$t = 2\pi/(2\pi r_0 T) = 1/(r_0 T) \tag{1.11}$$

und die Breite der Barrieren

$$b = L/r_0 \tag{1.12}$$

wird. Der Bruchteil des mit Hindernissen belegten Umfanges ist dabei

$$L T = b/t\,. \tag{1.13}$$

Abb. 3 stellt eine Quell-Senkenströmung zwischen A und D dar. Wird mit einer weiteren Ähnlichkeitstransformation

$$z_4 = (1/-j_2)\, z_3 \tag{1.14}$$

der Punkt D in den Punkt 1 überführt, dann wird nach Abb. 2 die Ergiebigkeit der Quelle in A der z_4-Ebene $E = j_1 t$. Aus (1.10) und (1.14) folgt

$$z_2 = \frac{1}{-j_2}\int \frac{1}{z_4}\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z_4}\,\mathrm{d}z_4\,. \tag{1.15}$$

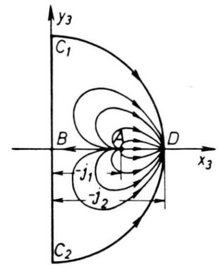

Abb. 3. z_3-Ebene.

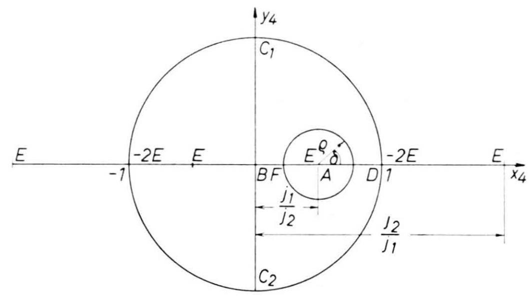

Abb. 4. z_4-Ebene.

Die Behandlung der Strömung in der z_4-Ebene durch Spiegelung des Halbkreisinneren an der y-Achse und danach durch Spiegelung des Kreisinneren am Einheitskreis ergibt die in Abb. 4 aufgezeichnete Anordnung von vier Quellen und zwei Senken. Das komplexe Potential dieser Quellenanordnung ergibt sich für irgendeinen Punkt z_4 zu[1]

$$\begin{aligned}\Phi = \frac{j_1 t}{2\pi}\Big[&\ln\Big(z_4 - \frac{j_1}{j_2}\Big) + \ln\Big(z_4 + \frac{j_1}{j_2}\Big)\\ &+ \ln\Big(z_4 - \frac{j_2}{j_1}\Big) + \ln\Big(z_4 + \frac{j_2}{j_1}\Big)\\ &- 2\ln(z_4 - 1) \;- 2\ln(z_4 + 1)\Big]\,.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Außerdem erhält man

$$L T = 1 - \frac{j_1}{j_2} - \frac{2}{\pi}\left[1 - \left(\frac{j_1}{j_2}\right)^2\right] \operatorname{arc\,tg} \frac{j_1}{j_2}\,. \tag{1.17}$$

2. Größe des Innengebietes

Uns interessiert hauptsächlich der Fall einer weitgehenden Belegung des Umfanges mit Verunreinigungen, also $LT \to 1$. Die engen Schlitze bedingen dann ein Stromdichtenverhältnis von

$$q \equiv j_1/j_2 \ll 1\,. \tag{2.1}$$

Damit läßt sich (1.17) entwickeln und man erhält mit (1.11)

$$LT \approx 1 - \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) q = 1 - 1{,}637\, q \approx 1\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{t}{2\pi} \approx \frac{L}{2\pi r_0} \frac{1}{1 - 1{,}637\, q} \approx \frac{L}{2\pi r_0}\,. \tag{2.3}$$

Beschreiben wir um die Quelle im Punkt A einen kleinen Kreis vom Radius $\varrho = \text{const}$ (Abb. 4), setzen wir also

$$z_4 = q + \varrho\, e^{i\delta}\,, \tag{2.4}$$

so erhalten wir wegen

$$\begin{aligned}\Re\{\ln(a + \varrho\, e^{i\delta})\} &= \ln[(a + \varrho\cos\delta)^2 + (\varrho\sin\delta)^2]^{1/2} \\ &= \tfrac{1}{2}\ln[a^2 + 2\,a\,\varrho\cos\delta + \varrho^2]\end{aligned}$$

für die Teilchenzahl auf dem Kreis

$$\begin{aligned} n = \Re(\Phi) = \frac{j_1 t}{2\pi}\Big\{ &\ln\varrho + \tfrac{1}{2}\ln|4\,q^2 + \varrho^2 + 4\,q\,\varrho\cos\delta| \\ &+ \tfrac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{1}{q} - q\right)^2 + \varrho^2 + 2\left(\frac{1}{q} - q\right)\varrho\cos\delta\right| \\ &+ \tfrac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{1}{q} + q\right)^2 + \varrho^2 + 2\left(\frac{1}{q} + q\right)\varrho\cos\delta\right| \\ &- \ln|(q-1)^2 + \varrho^2 + 2(q-1)\,\varrho\cos\delta| \\ &- \ln|(q+1)^2 + \varrho^2 + 2(q+1)\,\varrho\cos\delta|\Big\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Die genaue Untersuchung des Verlaufes von (2.5) in Abhängigkeit von ϱ und δ ergibt, daß unter der Voraussetzung von $q \leqq 0{,}1$ die Schwankungen der Teilchendichte beim Durchlaufen aller Kreispunkte kleiner als 3% sind, sofern nur

$$\varrho = g \cdot q\,, \quad \text{wo} \quad g \leqq 0{,}1 \tag{2.6}$$

gewählt wird.

Die zu (2.4) und (2.5) gehörenden Koordinaten in der z_2-Ebene ergeben sich aus (1.15). Mit der Hilfsvariablen $\zeta = z_4 - q = \varrho\, e^{i\delta}$ und $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}z_4 = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}\zeta$ wird

$$z_2 = z_{20} + \frac{1}{-j_2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1}{\zeta + q} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\zeta}\, \mathrm{d}\zeta\,. \tag{2.7}$$

Dabei gehört zu dem Wert $\zeta_0 = \varrho$ für $\delta = 0$ der Punkt z_{20} in der z_2-Ebene. Aus (1.15) erhält man nach Einführung der Hilfsvariablen $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}\zeta$, und damit wird aus (2.7) eine Summe elementarer Integrale. Einfache Umrechnungen ergeben

$$z_2 = z_{20} - \frac{t\,q}{2\pi}\left[\frac{1}{q}\ln\frac{(2\,q+\varrho)\,e^{i\delta}}{2\,q+\varrho\,e^{i\delta}} + q\ln\frac{(1/q+q+\varrho)\,(1/q-q-\varrho\,e^{i\delta})}{(1/q-q-\varrho)\,(1/q+q+\varrho\,e^{i\delta})} + 2\ln\frac{(q-1+\varrho)\,(q+1+\varrho\,e^{i\delta})}{(q+1+\varrho)\,(q-1+\varrho\,e^{i\delta})}\right]. \tag{2.8}$$

Für $q \leqq 0{,}1$ und mit (2.6) läßt sich (2.8) entwickeln zu

$$z_2 = z_{20} - i\,(t/2\,\pi)\,\delta\,. \tag{2.9}$$

Bei Durchlaufen des Kreises um A in der z_4-Ebene wird also in der z_2-Ebene eine zur y_2-Achse parallele Strecke durchmessen, deren Länge gerade gleich einer Streifenbreite t ist. Den Horizontalabstand $x_2' = x_{20}$ dieser Geraden, auf der die Teilchendichte praktisch konstant bleibt (Abb. 2), errechnen wir durch eine Integration längs der reellen z_4-Achse vom Punkt B zum Punkt F (Abb. 4).

$$x_2' = \frac{1}{-j_2} \int_0^{q-\varrho'} \frac{1}{x_4} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_4}\, \mathrm{d}x_4\,, \tag{2.10}$$

wobei gestrichene Koordinaten zu praktisch konstanten Teilchendichten gehören sollen. In ähnlicher Weise wie soeben ergibt sich mit (1.16)

$$x_2' = -\frac{t\,q}{2\pi}\left[\frac{1}{q}\ln\frac{\varrho'}{2\,q-\varrho'} + q\ln\frac{1/q-q+\varrho'}{1/q+q-\varrho'} + 2\ln\frac{1+q-\varrho'}{1-q+\varrho'}\right]. \tag{2.11}$$

Mit (2.6) erhält man daraus

$$x_2' = -\frac{t}{2\pi}\ln\left[\frac{g}{2-g}\left(\frac{1/q^2-1+g}{1/q^2+1-g}\right)^{q^2}\left(\frac{1/q+1-g}{1/q-1+g}\right)^{2q}\right] \equiv -\frac{t}{2\pi}\ln\Gamma. \tag{2.12}$$

Zu x_2' gehört in der ursprünglich gegebenen z-Ebene ein Kreis vom Radius r' (Abb. 1). Nach (1.7) und (1.8) erhält man

$$r' = r_0\, e^{x_2'} = r_0 \cdot \Gamma^{-t/2\pi} . \tag{2.13}$$

Nun ist $t/2\pi$ sehr klein. (Für das Beispiel der KCl-Whiskers liegt der Nadelradius in der Größenordnung $r_0 = 10\ \mu$, die Länge der Hindernisse kann zu $L = 100$ Å angenommen werden, so daß nach (2.3) $t/2\pi$ von der Größenordnung 10^{-4} wird. Mit diesem Wert erhält man aus (2.12) und (2.13) für $g = 0{,}1$ und $q \leqq 0{,}5$ stets

$$r' = 1{,}0002\ r_0 .) \tag{2.14}$$

Die eingangs getroffene Voraussetzung $r' - r_0 \ll r_0$ ist demnach gut erfüllt. Der Teilchenstau vor den Hindernissen kann als Sprung der Teilchendichte bei $r = r_0$ behandelt werden (Abb. 5). (Für $r_0 = 10\ \mu$ ist der Bereich der Welligkeit $r' - r_0 = 20$ Å und liegt erwartungsgemäß in der Größenordnung der Hindernisse.)

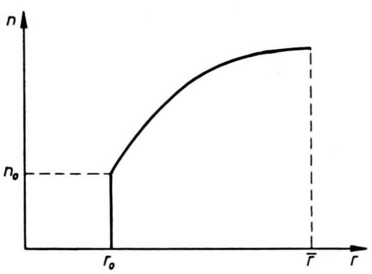

Abb. 5. Teilchendichte bei teilweise blockierten Senken (schematisch).

3. Anschluß an das Außengebiet

Den Verlauf der Teilchendichte für $r > r'$ erhält man durch noch weitere Verkleinerung des Radius ϱ in Gl. (2.5). Dort ist dann nur noch das erste Glied von Einfluß, also

$$n(\varrho) = n(\varrho') + (j_1\, t/2\pi) \ln(\varrho/\varrho') . \tag{3.1}$$

Die Verknüpfung der zu ϱ und ϱ' gehörenden Horizontalabstände x_2 und x_2' in der z_2-Ebene ergibt sich analog zu (2.10):

$$x_2 - x_2' = \frac{1}{-j_2} \int\limits_{q-\varrho'}^{q-\varrho} \frac{1}{x_4} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_4}\, \mathrm{d}x_4 . \tag{3.2}$$

Nach einfacher Zwischenrechnung erhält man für $\varrho,\ \varrho' \ll q$

$$x_2 - x_2' = -\,(t/2\pi) \ln(\varrho/\varrho') \tag{3.3}$$

und mit (1.7) und (1.8)

$$(r/r')^{2\pi/t} = \varrho'/\varrho . \tag{3.4}$$

Aus (3.1) und (3.4) folgt

$$n(r) = n(r') - j_1 \ln(r/r') . \tag{3.5}$$

Dies stimmt bis auf das quadratische Glied mit der in Teil I gegebenen Gl. (1.3) für offene Senken überein, wobei hier nach Abb. 1 $-j_1 = r_0\, z$. Beide Stromdichten stimmen wieder überein, sofern in (1.3) von I der quadratische Term vernachlässigt und $D = 1$ gesetzt wird. Für kleine r können die quadratischen Terme weggelassen werden; die Lösung im Innengebiet geht (bis auf den additiven Sprung der Teilchendichte bei $r \approx r' \approx r_0$) in die des Außengebietes über.

4. Sprung der Teilchendichte bei r_0

In Abschnitt 2 wurde gezeigt, daß auf einem ausreichend klein gewählten Kreis um A in der z_4-Ebene die Teilchendichte $n(\varrho') = n(x_2') = n(r')$ praktisch konstant bleibt. Dasselbe läßt sich für die Teilchendichte $n(\varrho'') = n(x_2'') = n(r'')$ auf einem (Halb-) Kreis vom Radius ϱ'' um D in der z_4-Ebene bzw. auf der zugehörigen Geraden $x_2'' = \text{const} \leqq 0$ in der z_2-Ebene (Abb. 2) bzw. auf dem entsprechenden Kreis vom Radius $r'' \leqq r_0$ in der z-Ebene (Abb. 1) zeigen. Daraus folgt, daß die Differenz der Teilchendichten $n(\varrho') - n(\varrho'')$ vom Weg in der z_4-Ebene unabhängig ist. Zur Ermittlung des Sprunges der Teilchendichte wählen wir die reelle Achse der z_4-Ebene und erhalten dort aus (1.16) und (2.11) mit $q - \varrho' = x_4$

$$\begin{aligned} n(x_4) = \frac{j_1\, t}{2\pi} \Big[& \ln|x_4 - q| + \ln|x_4 + q| \\ & + \ln\Big|x_4 - \frac{1}{q}\Big| + \ln\Big|x_4 + \frac{1}{q}\Big| \\ & - 2\ln|x_4 - 1| - 2\ln|x_4 + 1| \Big], \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} x_2(x_4) = \frac{-t}{2\pi} \Big[& \ln|x_4 - q| - \ln|x_4 + q| \\ & + q^2 \ln\Big|x_4 - \frac{1}{q}\Big| - q^2 \ln\Big|x_4 + \frac{1}{q}\Big| \\ & + 2\,q \ln|x_4 + 1| - 2\,q\ln|x_4 - 1| \Big]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dies ist eine Parameterdarstellung für $n(x_2)$. Abb. 6 zeigt den daraus berechneten Verlauf der Teilchendichte in der z_2-Ebene für verschiedene Stromdichtenverhältnisse q. Der Verbindung von A und D längs der reellen Achse in der z_4-Ebene entspricht die Symmetrieachse A_3D_3 des Spaltes in der z_2-Ebene (Abb. 2). Wie Abb. 6 zeigt, spielt sich (vor allem für kleine q) der ganze Stauprozeß bei positiven x_2-Werten ab. Für $x_2<0$ ist die Stromdichte schon wieder konstant; $x_2''=0$ kann also als die Gerade mit praktisch konstanter Teilchenzahl angesetzt werden. Da bei $x_2=0$ die Senke liegt, also $n=0$ sein muß, ergibt sich der Sprung der Teilchendichte aus dem Nulldurchgang von $n(x_2)$.

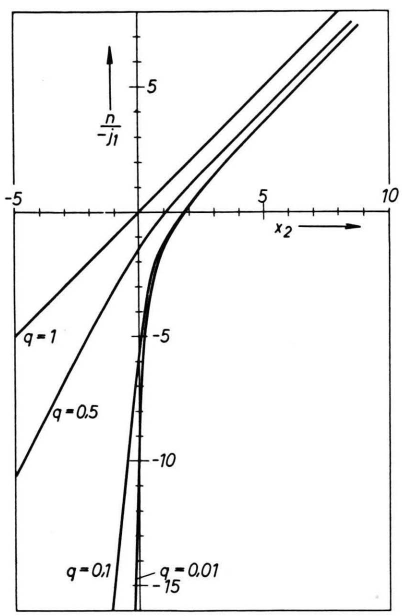

Abb. 6. Verlauf der Teilchendichte längs der Symmetrieachse des Spaltes in der z_2-Ebene. Einheit ist $t/2\,\pi$.

Wird in (4.2) $x_2=0$ gesetzt, und werden für kleine q-Werte das dritte und vierte Glied gegeneinander weggelassen, so erhält man den zugehörigen x_4-Wert aus

$$\frac{x_4{}^0-q}{x_4{}^0+q}=\left(\frac{1-x_4{}^0}{1+x_4{}^0}\right)^{2q}. \tag{4.3}$$

Bei der Aufzeichnung von Abb. 6 ergab sich, daß $x_4{}^0$ in der Nähe von 0,6 liegen muß. Der Ansatz $x_4{}^0=0{,}6+\varepsilon$ liefert für $q\leqq 0{,}1$ in sehr guter Näherung $\varepsilon=0{,}0515$, also $x_4{}^0=0{,}6515$. Wird dieser Wert in (4.1) eingesetzt, so erhält man nach einfacher Umrechnung für die Ordinate des Nulldurchganges von $n(x_2)$

$$n(0)\equiv n(x_2=0)\approx n(x_4{}^0)=\frac{j_1\,t}{2\,\pi}\,(0{,}244-2\ln q). \tag{4.4}$$

Den asymptotischen Verlauf n_∞ der Teilchendichte für große x_2-Werte bekommt man in der Nähe des Punktes A der z_4-Ebene, also mit $x_4=q+\eta$, wo $\eta\ll 1$, aus (4.1) und (4.2). Für $q\leqq 0{,}1$ und $\eta\leqq 10^{-4}$ wird nach einfacher Umrechnung

$$n_\infty=\frac{j_1\,t}{2\,\pi}\,(\ln\eta+\ln 2-\ln q)\,, \tag{4.5}$$

$$x_2=\frac{-t}{2\,\pi}\,(\ln\eta-\ln 2-\ln q)\,, \tag{4.6}$$

somit $$n_\infty=\frac{j_1\,t}{2\,\pi}\cdot 2\ln 2-j_1\,x_2\,. \tag{4.7}$$

Der Sprung n_0 der Teilchendichte bei $x_2\approx 0$ wird damit

$$n_0=n_\infty(0)-n(0)=\frac{-j_1\,t}{2\,\pi}\,(-1{,}144-2\ln q),\quad \text{wo}\quad q\leqq 0{,}1\,. \tag{4.8}$$

Wird aus (2.2) $q=(1-L\,T)/1{,}637$ und der Wert für $t/2\,\pi$ aus (2.3) eingeführt, sowie aus (1.3) von Teil I

$$-j_1=(2\,r_0\,z+r_0{}^2\,v)/2\,D\,,$$

so ist

$$n_0=\frac{L\,(2\,z+r_0\,v)}{4\,\pi\,D}\,[-0{,}158-2\ln(1-L\,T)],\quad \text{wo}\quad L\,T\geqq 0{,}85\,. \tag{4.9}$$

5. Lösung

Wie gezeigt wurde, läßt sich für den interessierenden Bereich mit dem Stromdichtenverhältnis $q\leqq 0{,}1$, also $L\,T\gtrapprox 0{,}8$, die Teilchendichte als Überlagerung des Sprunges n_0 bei r_0 mit der Teilchendichte für ungehinderte Diffusion [Gl. (1.5) von I] darstellen. Die Addition von (1.5) aus I und (4.9) ergibt unter Verwendung von (1.4) aus I

$$n=n_0+\frac{v}{4\,D}\left\{\bar r^2\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^2-r_0{}^2\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2-1\right]\right\}, \tag{5.1a}$$

$$n=\frac{v}{4\,D}\left\{\bar r^2\left[\frac{L}{\pi\,r_0}\,(-0{,}158-2\ln[1-L\,T])+\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]-r_0{}^2\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2-1\right]\right\} \tag{5.1b}$$

$$\text{für}\quad L\,T\geqq 0{,}85\,,\qquad r_0\leqq r\leqq\bar r\,,\qquad L\ll r_0\,.$$

Die in Abb. 3 von Teil I gezeigte (reduzierte) Teilchendichte ist also überall um $n_{r0} \equiv (4\,D/v) \cdot n_0$ angehoben. Die Tabelle gibt den Sprung n_{r0} für die experimentellen Daten bei der Whisker-Entstehung [2, 6] $\bar{r} = 150\ \mu$ und $L = 100$ Å für verschieden starke Blockierungen. ($L\,T$ ist dabei der Bruchteil des mit Verunreinigungen belegten Umfanges der untersten Spiralwindung.)

Blockierter Bruchteil des Umfanges $2\,\pi\,r_0$	$L\,T$	0,9	0,99	0,999	0,9999
n_{r0} in 10^{-8} cm² für	$r_0 = 1\ \mu$	318	646	977	1307
	$r_0 = 10\ \mu$	31,8	64,6	97,7	130,7
	$r_0 = 45\ \mu$	7,1	14,4	21,8	29,2

Tab. 1. Sprung der mit $4\,D/v$ reduzierten Teilchendichte $n_{r0} \equiv (4\,D/v) \cdot n_0$ bei r_0 für $\bar{r} = 150\ \mu$ und $L = 100$ Å.

Der Vergleich der Tabelle mit Abb. 3 von I ergibt, daß n_0 selbst bei 99,99% Blockierung noch beträchtlich kleiner als die maximale Teilchendichte $n(\bar{r})$ bei ungehinderter Diffusion bleibt. Erst bei vollständiger Belegung, d. h.

$$L\,T = 1\,, \tag{5.2}$$

steigt n_0 beliebig an. Der Teilchenstrom

$$j = -D\,(\mathrm{d}n/\mathrm{d}r)$$

bleibt für $L\,T < 1$ unbeeinflußt gleich dem für offene Senken.

Aus der gesamten Herleitung von Gl. (5.1) ist ersichtlich, daß sie auch dann noch gültig ist, wenn L und T längs der Senkenbegrenzung variieren, solange nur $L \ll r_0$ und $L\,T > 0{,}8$ erhalten bleiben. n_0 hängt dann gemäß (5.1) über die Winkelabhängigkeit von $L(\varphi)$ und $T(\varphi)$ vom Winkel φ ab.

Herrn Prof. Dr. N. Riehl danke ich sehr für die ständige Förderung dieser Arbeit, den Herren Dr. K. Isebeck und Dr. H. Vogel für anregende Diskussionen.

[6] W.-U. Wagner, Z. Naturforschg. **19 a**, 1490 [1964].